

Pensamiento variacional en un enfoque por sistemas a través de las transformaciones lineales en Álgebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático

Andrea Silvia Arce^{1,2}; Carlos Pintos^{1,3}; María Cristina Kanobel^{1,4}

¹ Universidad Tecnológica Nacional-Facultad Regional Avellaneda

² ansarce@gmail.com, ³ pintoscarlos85@gmail.com,

⁴ mckanobel@gmail.com

Resumen

Interesados en gestionar clases de matemática en el nivel universitario que promuevan un acercamiento común a las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático y que contemple un pensamiento variacional en el área, presentamos un diseño innovador de tareas académicas de alto alcance, motivadoras para los estudiantes de las carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Avellaneda de la República Argentina. Este trabajo se inserta en el marco del Proyecto de Investigación Interfacultades "Formación inicial en Ingenierías y Carreras Tecnológicas". El eje de dichas tareas serán las transformaciones lineales utilizando un enfoque por sistemas considerando sus componentes, sus relaciones y sus transformaciones u operaciones. El diseño se sustenta en una propuesta que permita promover un aprendizaje autorregulado que perdure en el tiempo. Está prevista intercambio e implementación de este trabajo con la Facultad Regional Bahía Blanca y Facultad Regional Chubut, integrantes del proyecto de investigación, con el propósito de evaluar y mejorar el diseño.

Palabras clave: Pensamiento variacional, Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático, transformaciones lineales, enfoque por sistemas.

Objetivos

El presente trabajo propone el diseño de tareas académicas para desarrollar las transformaciones lineales desde un enfoque por sistemas, atendiendo el pensamiento variacional de la matemática, impulsando un cambio en las clases de Álgebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático en miras de un pensamiento más dinámico acorde con las necesidades del actual estudiante y futuro ingeniero o ingeniera. Así mismo nos proponemos que dichas tareas contemplen distintas variables motivacionales que promuevan un aprendizaje significativo y autorregulado en los estudiantes.

Metodología

En la Facultad Regional Avellaneda las asignaturas de 1° año, Álgebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático I, son homogéneas a todas las Carreras de Ingeniería ambas con cursadas anuales. El diseño se implementará en ambas materias a la par, evitando una visión segmentada de la matemática, entendiendo que un acercamiento común posibilita un aprendizaje significativo y perdurable. Para este enfoque se eligen a las transformaciones lineales como hilo conductor en ambas materias.

El diseño de las tareas académicas contemplará los distintos momentos del pensamiento variacional con su respectiva retroalimentación. Una vez realizada la tarea académica se proponen actividades en el Campus virtual que acompañen el desarrollo del pensamiento variacional y de la modelización matemática

Marco Teórico

La investigación se enmarca en los *enfoques socio-cognitivos de la motivación* que atienden a las complejas interrelaciones que se establecen entre la motivación de los estudiantes, sus estrategias de aprendizaje (aspectos cognitivos) y las características propias del contexto académico, inserto en la especificidad de la ciencia Matemática, orientando el pensamiento variacional a desarrollar habilidades y competencias de orden superior partiendo de diferentes situaciones bajo el concepto de cambio y variación. Desde una perspectiva socio-cognitiva de la motivación académica, Järvelä y Niemi-virta (2001) enfatizan su carácter situado al definirla como “un proceso de construcción psico-lógica que realiza un

estudiante individual y que toma la forma de las interpretaciones y valoraciones situacionales...” (Järvelä y Niemivirta, 2001, p. 123).

Por lo expuesto, el diseño de tareas académicas promisorias para la motivación y el aprendizaje debe contemplar entre otras las siguientes características: variedad y diversidad, significatividad en distintos marcos, funcionalidad, moderado nivel de dificultad, desafío, curiosidad, colaboración, posibilidad de elección y control (Paoloni, 2010).

Tarea Académica

Tomamos la visión de la tarea académica como contexto de aprendizaje complejo, dado que sus características se interpretan como dinámicas y no estáticas, en permanente interacción con factores personales y contextuales, y no deterministas en sus efectos potenciales. Al diseñarlas es necesario tener en cuenta las interpretaciones que los alumnos elaboran acerca de las claves contextuales del diseño identificando las particularidades de las interrelaciones que se establecen entre aspectos cognitivos, motivacionales y contextuales (Paoloni, 2010).

Trabajo colaborativo

Los contextos educativos que promueven actividades donde los estudiantes discuten distintos puntos de vista, se ayudan entre sí, toman decisiones en grupos, interactuando, permiten que el aprendizaje se enriquezca a partir de los conocimientos compartidos y las estrategias elegidas para aprender (Järvelä y Niemivirta. 2001). De esta forma se construye conocimiento en forma conjunta. Las tareas que promueven este tipo de trabajo, producen situaciones propicias para generar mayor autonomía, para decidir por ejemplo la distribución del trabajo dentro del grupo, las estrategias a utilizar, el ajuste de las mismas y la responsabilidad de cada estudiante dentro del grupo. El trabajo colaborativo puede promover que los alumnos autorregulen su aprendizaje de una mejor forma. Así mismo, La creciente especialización de las actividades y conocimientos en el campo de la ingeniería, aún dentro de una misma rama, exige el compromiso de trabajo en equipo.

Aprendizaje autorregulado

Definimos a la autorregulación del aprendizaje como “el proceso en el cual los estudiantes activan y sostienen pensamientos, efectos y comportamiento que son planteados y cíclicamente adaptados a la consecución de sus metas” (Zimmerman, 2000). Este proceso dinámico supone un aprendizaje independiente, en el cual los estudiantes determinan sus metas y estrategias, regulando su motivación y comportamiento, haciendo uso de sus recursos personales. En el modelo de aprendizaje autorregulado que nos presenta Pintrich (2000), los estudiantes son partícipes y protagonistas de sus propios procesos de aprendizaje, monitorean, controlan y regulan aspectos de su propia cognición, motivación, comportamiento y ambiente; comparan sus desempeños y analizan cambios en su accionar para alcanzar las metas establecidas. Las actividades autorregulatorias realizan una mediación entre el contexto, los rasgos personales y el rendimiento obtenido. La motivación es esencial para la realización de las actividades, ya que estas demandan más tiempo y esfuerzo que las tradicionales.

En síntesis, en el aprendizaje autorregulado se encuentran los siguientes procesos:

- Análisis de la tarea.
- Establecimiento de metas adecuadas de aprendizaje.
- Definición e implementación de estrategias para lograr los objetivos.
- Monitoreo de los resultados asociados a las estrategias utilizadas, valoraciones sobre el desempeño en las tareas y sobre la efectividad de las estrategias.
- Ajustes en los modos de aprender, basados en el éxito de sus esfuerzos, registrados mediante el feedback interno y externo. Posibilidad de modificar metas, estrategias.
- Reconocimiento de la influencia de una variedad de conocimientos y creencias: creencias motivacionales, conocimientos del estudiante acerca de sí mismo.
- Consideración de las influencias del contexto, en los aspectos interactivos y sociales.

Pensamiento variacional

El pensamiento variacional puede explicarse como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o

distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2003). En él podemos distinguir cuatro momentos a saber: Momento de captación de lo que cambia y de lo permanece constante, momento de producción de sistemas mentales, momento de aplicar el modelo, momento de comparar los resultados con el proceso de modelado, momento de revisión del modelo

Este pensamiento involucra elaboración de estrategias, distintas formas de razonamiento y estructuras lingüísticas que permiten comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación.

Por su parte (Zorn et al., 2004) señala la relevancia de utilizar distintos contextos como así también variadas experiencias, metodologías para desarrollar diferentes conceptos y objetos matemáticos.

En este trabajo sostenemos al igual que Grozdev y Todorka, (2010) que la función del pensamiento variacional es descubrir las propiedades y determinar conexiones mediante las transformaciones de la realidad.

Enfoque por sistemas

Este enfoque tiene el beneficio de estudiar a los sistemas analíticos considerando sus componentes, relaciones y transformaciones u operaciones (Vasco, 2003). Pensamos en una situación superadora a la del estudio del Álgebra y la Geometría Analítica como conocimiento estanco y separado del Análisis Matemático.

Tecnologías de la Información y la Comunicación

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) están inmersas en el ámbito profesional y en el ámbito educativo. Sostenemos que en el diseño de actividades académicas en entornos virtuales es fundamental para comprobar una formulación simbólica, afianzar conceptos, reformular modelos, como así también para realizar una extensión del aula presencial a partir del aula virtual del curso en la Plataforma Moodle (Sancho, 2007).

Utilizando la tecnología podremos realizar una formulación simbólica, calcular con esa formulación y comparar los resultados con el proceso modelado para luego, de ser necesario reformular del modelo.

Diseño

Las transformaciones lineales son las funciones con las que se trabajan en álgebra lineal. Se trata de funciones entre K -espacios vectoriales que son compatibles con la estructura de esos espacios, es decir con la operación y la acción. Dichas funciones deben cumplir dos condiciones, ser distributiva a la suma entre dos elementos perteneciente al espacio vectorial de partida, y que la transformación de un elemento del espacio K multiplicado por un escalar del espacio vectorial de partida es igual escalar del espacio K multiplicado por la transformación del elemento del espacio vectorial de partida. Dentro del análisis matemático hay diferentes conceptos que pueden ser pensados desde el álgebra como transformaciones lineales y viceversa

En el sentido desarrollado anteriormente percibimos a las transformaciones lineales como un eje conductor que nos permite interrelacionar distintos conceptos y situaciones que se estudian por separado en ambas materias. Transformaciones lineales es el tema de la Unidad 10 de nuestro programa de estudios de Álgebra y Geometría Analítica. En Análisis Matemático estudiamos el diferencial y la integral, nos proponemos entonces desarrollar este contenido en un sistema analítico indagando sobre sus componentes, relaciones y transformaciones.

En una primera instancia presentamos un sistema de ecuaciones dado en forma matricial, advirtiendo que la matriz de coeficientes opera sobre un vector transformándolo en otro. De esta manera le damos una visión dinámica al producto de matrices. Esto es importante para entender muchas ideas del álgebra lineal y estructurar modelos matemáticos de sistemas físicos que evolucionan a través del tiempo, es decir, sistemas dinámicos.

En una segunda instancia presentamos una para función para determinar si es transformación lineal, para luego estudiar distintos operadores lineales como el diferencial de una función y la integral con la idea de lograr que los estudiantes puedan abstraer las propiedades que cumplen haciendo hincapié en ellas.

En una tercera y última instancia proponemos la modelización de un problema complementando las etapas del pensamiento variacional.

Primera Instancia: Tarea 1

Propósito: Nos proponemos que en un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado en forma matricial, los alumnos indaguen cómo la matriz A actúa u opera sobre un vector \mathbf{x} multiplicándolo para producir un nuevo vector $A\mathbf{x}$. Desde este nuevo punto de vista resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a encontrar todos los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que se transformen en el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ bajo la acción de multiplicar por $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mediante una Transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por el operador A .

Actividad 1

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ y } T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

$$\text{O sea } T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ 3x + 5y \\ -x + 7y \end{pmatrix}$$

- a) Encuentre $T(\mathbf{u})$
- b) Encuentre un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea \mathbf{b} .
- c) ¿Existe más de un vector \mathbf{x} cuya imagen bajo T sea \mathbf{b} ?
- d) Determine si \mathbf{c} pertenece a la imagen de la transformación lineal T .

Segunda Instancia: Tarea 2

Propósito: Nos proponemos que el alumno investigue si determinadas funciones son transformaciones lineales, indague distintos operadores lineales, resaltando la preservación de las operaciones suma y producto por un escalar.

Actividad 1

Determine si las siguientes funciones son transformaciones lineales.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \text{sen } x$
- b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = a x$

Actividad 2

Sea $T: P_3 \rightarrow P_3$ la transformación lineal definida por $T(f) = D^2(f) - 4D(f) + f$.

Encuentre la Matriz asociada a la Transformación lineal T respecto a la base

$$B = \{x^3; x^2; x, 1\}. \text{ Luego Halle } T(4x^3 - 2x^2)$$

$$\text{Nota } D(f) = f'(x)$$

Tercera Instancia: Tarea 3

Propósito: Nos proponemos que los alumnos modelicen un sistema dinámico que cambia con el tiempo, complementando las etapas del pensamiento variacional.

Actividad 1

Modelice y resuelva utilizando software matemático disponible en la Plataforma Moodle.

En cierta región alrededor del 6% de la población de la ciudad se muda a los suburbios cada año y el 4% de la población suburbana se muda a la ciudad. En 2015 había un millón de residentes en la ciudad y cuatrocientos mil habitantes en los suburbios. Establezca un modelo que describa esta situación donde x_0 es la población inicial en 2015, luego estime la población de la ciudad y de los suburbios cinco años después.

Conclusiones y Trabajos Futuros

Creemos que incluir tareas académicas que propongan un acercamiento más dinámico a la matemática, en contraposición a una visión estática como la aritmetización del Análisis (Vasco, 2003) acompañando al alumno en la discusión de los objetos, procesos y transformaciones que intervienen en la resolución de las tareas, permite la superación de una visión de la matemática como un cúmulo de verdades inmutables. Particularmente, cada una de las tareas se diseñan pensando en un alumno participe de la construcción de su propio aprendizaje acompañado del profesor atendiendo las recomendaciones del CONFEDI ya que se sostiene que un aprendizaje auténtico y de mayor significación y persistencia, permite desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior (pensamiento crítico, creatividad, análisis, conceptualización, evaluación y autoevaluación). Esta propuesta forma parte de un trabajo de campo que se prevé desarrollar en la Universidad Tecnológica Nacional en la Facultad Regional Avellaneda en el presente ciclo lectivo. Posteriormente a la implementación de esta metodología de enseñanza, se planea la construcción de instrumentos que permitan evaluar el impacto sobre el aprendizaje y sobre la motivación en cuanto a la confianza en sus posibilidades y el propio desempeño académico de los estudiantes.

En una segunda etapa, consideramos importante desarrollar actividades que involucren a las transformaciones lineales en Álgebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático I,

incorporando a la Asignatura Análisis Matemático II del segundo año de las carreras de Ingeniería. Es nuestro interés que el futuro ingeniero o ingeniera, puede beneficiarse con el desarrollo de la tarea, resultando importante evaluar el impacto sobre la formación de este tipo de actividades en los estudiantes a partir de las estrategias de enseñanza promovidas.

Referencias bibliográficas

- Fraleigh, J. Bearegard, R. (1989). *Álgebra lineal*. Addison- Wesley Iberoamericana S.A.: Wilmington, Delaware. E.U.A.
- Järvelä, S. y Niemivirta, M. (2001). Motivation in context: Challenges and possibilities in studying the role of motivation in new pedagogical cultures. En S. Volet y S. Järvelä (Eds.), *Motivation in Learning Contexts. Theoretical Advances and Methodological Implications* (pp. 105-127). London: Pergamon- Elsevier
- Morano, D. (2018). *La formación de ingenieros en Argentina*. El proceso de aseguramiento de la calidad. ACOFI - CONFEDI: Aseguramiento De La Calidad Y Mejora De La Educación En Ingeniería.
- Lay, C. (2000). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson educación S.A.: México.
- Paoloni, P. V. (2010). Motivación para el aprendizaje. Aportes para su estudio en el contexto de la universidad. En Paoloni, P. V., M. C. Rinaudo, D. Donolo, A. González Fernández y N. Rosselli (2010) *Estudios sobre motivación: enfoques, resultados, lineamientos para acciones futuras*. Editorial de la Universidad Nacional de Río Cuarto. Río Cuarto.
- Pintrich, P. (2000). The role of goal orientation in selfregulated learning. En Boekaerts M., P. Pintrich y M. Zeidner (Eds.) *Handbook of self- regulation*. San Diego: Academic Press.
- Sancho, J (2007). La Plataforma Educativa Moodle. *Manual de Consulta para el Profesorado*. Recuperado de: http://www.fvet.uba.ar/postgrado/Moodle18_Manual_Prof_1.pdf.
- Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Blumenau Vol. 9.
- Zimmerman, B. (2000). Attaining self regulation: A social cognitive perspective. En Boekaerts, M., Pintrich, P. y Zeidner, M. (Eds.) *Handbook of self- regulation*. San Diego. Academic Press.
- Zorn, P., Judson, T., Kota, O., Okabe, T., Kiuchi, T., y Becker, J. (2004). *The Teaching and*

Learning of Calculus by H. Fujita et al. Kluwer Academic Publisher: Dordrecht, Netherlands.